

УДК 004.02

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

магистрант Е.Ю. ДАНЬКО

*(Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, Минск, Беларусь)*

Оптимизация проектных решений является одним из элементов технического проектирования. Эта процедура позволяет инженерам либо найти оптимальные геометрические и технические характеристики объекта при заданных условиях, либо вывести общие соотношения и построить необходимые методы расчета, если их еще не существует. С точки зрения процесса проектирования технических средств или машин задача состоит в том, чтобы выбрать наиболее предпочтительный вариант проектирования. При этом процесс оптимального выбора основных характеристик проектируемого объекта становится частью соответствующего метода решения задачи, а оптимизация проектных решений остается содержательной основой проектирования.

Для решения задачи оптимального проектирования используется метод математического моделирования. Исследование объектов с помощью этого метода позволяет проникнуть в сущность изучаемых объектов и дает возможность решения многокритериальных задач. Исследование объектов и процессов на основе методов моделирования признано в настоящее время одним из приоритетных направлений научно-технического прогресса.

К задачам параметрической оптимизации относятся следующие основные задачи:

- определение оптимальных значений параметров;
- назначение оптимальных допусков на параметры по математической модели и заданным ограничениям на показатели качества;
- параметрическая идентификация (уточнение параметров в модели блока объекта проектирования на основе данных испытания).

При наличии поставленных задач возможны следующие их решения:

- полный перебор (учитывая трудоёмкость оценки эффективности перебора всех комбинаций сочетания элементов) – неприемлем;
- сокращённый перебор (используются методы случайного поиска, однако, здесь неясно, когда остановится, поскольку случайный поиск неуправляем);
- экспертные оценки [1].

При проектировании целесообразно вести работу в два этапа. На первом этапе определяют параметры, обеспечивающие заданные характеристики изделия. На втором этапе улучшают конструкцию по отдельным характеристикам, принятым за критерий оптимизации. Например, если целью оптимизации детали (сборочной единицы) является обеспечение минимальной массы, то критерием оптимизации будет его масса. Для решения задачи оптимизации, т.е. для выбора оптимального варианта конструкции, критерий оптимизации следует выразить через переменные проектирования (параметры оптимизации):

$$W = \varphi(x) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

где W – целевая функция;

x_1, x_2, \dots, x_n – параметры (переменные) проектирования.

Если целевая функция зависит от одной переменной проектирования x_1 , то в плоской декартовой системе координат («плоскости проектирования») она может быть представлена некоторой кривой $L(u_1)$. В случае двух параметров проектирования x_1 и x_2 зависимость целевой функции от этих параметров можно изобразить в форме поверхности $F(x_1, x_2)$ в пространственной прямоугольной системе координат («пространстве проектирования»). На практике весьма сложно образовать целевую функцию для нескольких критериев оптимизации, т.к. для этого надо знать значимость каждого из них. Поэтому характеризуют целевую функцию по одному главному параметру оптимизации, полагая другие параметры лежащими в допустимой области. После того, как образована целевая функция, задача оптимизации сводится к определению её экстремума.

В настоящее время насчитывается несколько сотен различных методов оптимизации и их модификаций, к тому же каждый из методов учитывает специфику сформулированной задачи, связанную с количеством и видом функций, с характером изменения параметров. В простейшем случае (при одном варьируемом параметре) путем перебора нескольких просчитанных вручную вариантов изделия и оценкой по какому-либо критерию оптимизации (массе, габариту, стоимости и т.п.) проектировщик может выбрать наиболее приемлемый вариант. Однако уже при двух варьируемых параметрах трудно уловить влияние каждого из них на главные характеристики. Возникает многомерная проблема. Полный обсчет всех возможных вариантов проектных параметров часто произвести не удастся. В этом случае эффективным оказывается использование математических методов оптимизации, выбирающих кратчайшие пути оптимизации и сокращающих время расчета. Оптимизация на базе ЭВМ (электронно-вычислительных машин) позволяет получить более высокое качество решений за счет использования более сложных моделей изделий. Таким образом, задача оптимального проектирования состоит в определении значений $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ – переменных проектирования, при которых удовлетворяется ряд ограничений (функциональных, параметрических и др.), накладываемых на параметры проектируемого изделия для выполнения заданных функций, и функционал W (целевая функция) принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение: $W = \varphi(X) \rightarrow extremum$

Таким образом, если присутствуют в задаче ограничения, как явные, так и неявные, в виде равенств и неравенств, то в математическом программировании ее называют задачей условной оптимизации. Если ограничения отсутствуют, то она является задачей безусловной оптимизации [2].

Разработаны многочисленные методы решения задачи оптимизации при различных видах целевой функции, уравнений связи и ограничений, которые условно можно подразделить на две группы: классические (метод дифференциального исчисления, метод множителей Лагранжа, вариационное исчисление) и методы математического программирования (методы линейного и нелинейного программирования, метод динамического программирования, принцип максимума Понтрягина и др.). Решающим фактором того, что оптимизация конструкции стала возможной, является наличие быстродействующих ЭВМ, способных быстро выполнять математические и логические операции с большим числом данных [3].

Разработаны методики решения задач оптимизации, которые учитывают вид целевой функции и функций в ограничениях. Эти методики определяют различные ви-

ды программирования: линейное, квадратичное, геометрическое, дробнолинейное, динамическое, сепарабельное.

Так, методы линейного программирования предназначены для решения задач, где целевые функции и функции в ограничениях линейны. Квадратичным является программирование, где целевые функции квадратичны, а функции в ограничениях линейны.

Применение методов дискретного программирования (таких как, например, задача о коммивояжёре, о покрытии, о назначении и т. д.) связано с высокой вычислительной сложностью переборных задач. Получение точного решения неэффективно, так как трудоёмкость поиска экспоненциально растёт с размерностью (поэтому применяют приближенные алгоритмы).

Метод динамического программирования имеет преимущество по сравнению с прямыми методами минимизаций функционала при наличии ограничений, так как он позволяет свести задачу минимизации функции нескольких аргументов к минимизации последовательности функций одного аргумента. Для задач оптимизации с целевой функцией, имеющей несколько экстремумов, разработаны методы глобальной оптимизации.

Наиболее широко представлены в математическом моделировании численные методы определения для однокритериальных задач локального оптимума. В связи с этим целесообразно подстроиться под эти методы путем выбора одного главного критерия или путем свертки нескольких критериев в один обобщенный, а оставшиеся критерии в обоих случаях принять за неявные ограничения.

Построение обобщенного критерия оптимизации представляется в виде суммы частных критериев оптимизации с учетом их веса (значимости):

$$Y = \sum_{i=1}^N Y_i C_i, \quad (2)$$

где Y_i – значение i -го критерия оптимизации;

C_i – весовой коэффициент.

Эффективность методов многомерной (многопараметрической) оптимизации зависит от применяемых методов одномерной оптимизации. Для одномерной оптимизации применяют метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод квадратной аппроксимации, где не требуется условия гладкости оценочной функции.

Безусловная оптимизация дважды непрерывно дифференцируемой оценочной функции многих переменных может быть выполнена градиентным методом, методом наискорейшего спуска, сопряженных направлений, Флетчера-Ривса, Давидона-Флетчера-Пауэлла, Ньютона, Ньютона-Рафсона и др. Решение задач условной оптимизации может быть осуществлено методами штрафных функций, квадратичной оптимизации и др [4].

Выбор того или иного метода решения задачи оптимизации зависит не только от постановки задачи, но и от затрат на расчет по алгоритму выбранного метода. Максимальную автоматизацию решения задач оптимального проектирования можно достичь созданием САПР (системы автоматизированного проектирования), в которой для ее предметной области (например, рычажные механизмы, гидроустройства, пневмопривода) формируется математическая модель, рассчитываются критерии и используется

инвариантное программное обеспечение для методов оптимизации, проводится диалог с конструктором на всех этапах моделирования.

Развитие методологии, численных методов и алгоритмов оптимального проектирования в настоящее время оказывает решающее влияние на особенности проектирования устройств, систем, машин и т.д. Общим для задач принятия оптимальных решений, которые возникают на разных этапах проектирования, является то, что они могут быть сформулированы математически как задача нелинейной оптимизации: для заданной математической модели проектируемого устройства требуется подобрать такие значения варьируемых параметров, чтобы они обеспечивали экстремальное значение (максимум или минимум) одной из наиболее важных технико-экономических характеристик при условии, что другие характеристики удовлетворяют заданной совокупности технических требований. В настоящее время решение задачи оптимального проектирования требует индивидуального подхода и связано с применением нескольких методов поиска оптимального решения, и даже в этом случае успех во многом будет зависеть от квалификации и опыта проектировщика. В связи с этим в разрабатываемых системах автоматизированного проектирования большое внимание уделяют вопросам принятия оптимальных решений в интерактивном режиме, когда пользователь имеет возможность оперативно взаимодействовать с ЭВМ на любом этапе решения своей задачи.

Решающим фактором того, что оптимизация конструкции стала возможной, является наличие быстродействующих ЭВМ, способных быстро выполнять математические и логические операции с большим числом данных.

Успехи в области вычислительной техники, системного анализа, численных методов, теории оптимизации, теории моделирования позволяют найти принципиально новые подходы к решению задач проектирования конструкций.

Литература

1. Андронов, С. А. Метода оптимального проектирования : текст лекций / С. А. Андронов. – СПбГУАП.СПб, 2001. – 169 с. : ил.
2. Определение оптимального проектирования [Электронный ресурс]. – Режим доступа:<http://www.viktoriastar.ru/konstruirovanie/289-opredelenie-optimalnogo-roektiro-vaniya.html>. – Дата доступа: 15.05.2018.
3. Гельмерих, Р. Введение в автоматизированное проектирование / Р. Гельмерих, П. Швиндт ; пер. с нем. – М. : Машиностроение, 1990. – 176 с.
4. Аттетков, А.В. Метода оптимизации / А. В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2001. – 480 с.